Carpeta de Matemática 2
Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 3

# Nueva carpeta de Matemática V

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Mónica Real - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

**3. Funciones polinómicas. Factorización de polinomios** 3
*Revisión inicial* ....4
Las funciones potenciales ....5
Las funciones polinómicas ....6
Las funciones polinómicas y los polinomios ....7
Adición y sustracción de polinomios ....8
Multiplicación de polinomios ....9
División entera de monomios ....10
División entera de polinomios ....11
La regla de Ruffini ....12
Valor de un polinomio para $x = a$. Raíces de un polinomio ....12
Teorema del resto ....13
Factorización de polinomios ....14
Factor común ....14
Polinomios de segundo grado ....14
Otros casos ....15
Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros ....16
Grado y raíces de un polinomio ....17
Las funciones polinómicas y sus gráficas ....18
Conjunto de positividad y negatividad ....19
Reconstrucción de fórmulas polinómicas a partir de sus gráficas ....20
La factorización de polinomios como herramienta para resolver ecuaciones ....21
Los polinomios y las raíces no reales ....22
El cambio de variable en la resolución de ecuaciones ....23
*En el mundo real* ....25
Los polinomios en la construcción de un ascensor ....25
Funciones polinómicas que permiten estimar costos ....26
*Más actividades* ....27
*Autoevaluación* ....30
*Actividades integradoras* ....31

AIQUE

**Este CUADERNILLO 3 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática V.**
**No puede venderse por separado.**

**DIRECCIÓN EDITORIAL**
Teresita Valdettaro

**COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA**
Ruth Schaposchnik

**EDICIÓN**
Gustavo Zorzoli

**CORRECCIÓN**
Cecilia Biagioli (coordinación)
Mercedes Seara

**SUPERVISIÓN GRÁFICA**
Verónica Uher
Victoria Maier

**COORDINACIÓN GRÁFICA**
Constanza Di Gregorio - Silvina Roveda

**DIAGRAMACIÓN**
Constanza Di Gregorio - Silvana López

**ILUSTRACIONES**
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

**FOTOGRAFÍA**
Archivo Aique

**PRODUCCIÓN INDUSTRIAL**
Pablo Sibione

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0077-0
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática V / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Mónica Real ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
160 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0077-0

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Real, Mónica III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

# 3 FUNCIONES POLINÓMICAS. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

**Las funciones lineales y las cuadráticas forman parte de una familia más amplia: las *funciones polinómicas*. Sus fórmulas, a las que llamamos *polinomios*, son de múltiples aplicaciones, ya que nos permiten expresar, por ejemplo, perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas en función de sus dimensiones, aun cuando estas sean variables.**

**Como una forma de analizarlas, se utiliza una herramienta algebraica específica: la *factorización de polinomios*.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# REVISIÓN INICIAL

**1** Resuelvan utilizando las propiedades de la potenciación.

a) $x^5 \cdot x^6 : x^9 =$

b) $x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x \cdot y^5 : x =$

c) $x^4 \cdot y \cdot x^5 \cdot y^2 =$

d) $[z^{-1} : z^{-2}]^3 =$

e) $[z^3]^2 =$

f) $\frac{x^6 \cdot y^5 \cdot z^8}{x \cdot z^3} =$

**2** Indiquen en cada caso si la expresión es una igualdad (I) o no (N).

a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

b) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

c) $\frac{x + y}{x} = y$

d) $x^4 \cdot y^4 = (x \cdot y)^8$

e) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$

f) $(x + y) \cdot (z + y) = (x + y) \cdot z + (x + y) \cdot y$

**3** Completen el siguiente texto usando los conceptos de *exacta, múltiplo, divisor* y *divisible.*

El resto de dividir 52 873 por 37 es ....., es decir que dicha división es ..... .

Por lo tanto, decimos que 52 873 es ..... de 37, o que 37 es ..... de 52 873.

Equivalentemente, podemos decir que 37 divide a ..... , o que 52 873 es .....por 37.

**4** Encuentren todos los divisores de los siguientes números.

a) 4 b) 2 c) −15 d) 30 e) −3 f) 1

**5** Hallen el divisor común mayor y el múltiplo común menor entre los siguientes números.

a) 360 y 162 b) 50 y 80 c) 50, 80 y 500

**6** Observen la figura y respondan si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Para las que sean falsas, escriban la respuesta correcta. ($S(A)$ significa área de la figura A).

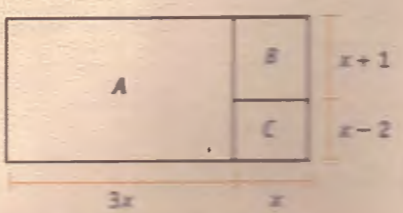
a) $S(A) = 6x^2 - 3x$

b) $S(B) = x^2 - x$

c) $S(C) = 2(x^2 - x)$

d) $S(A) + S(B) = x \cdot (7x - 2)$

e) $S(A) + S(B) - S(C) = 8x^2$

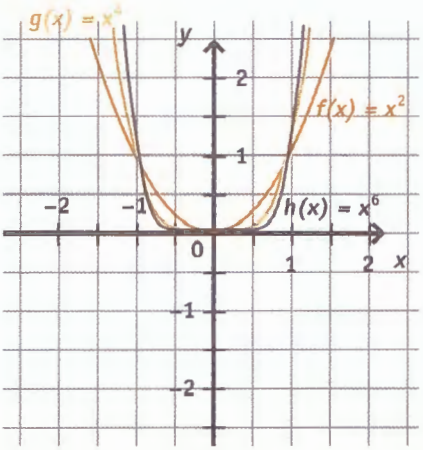


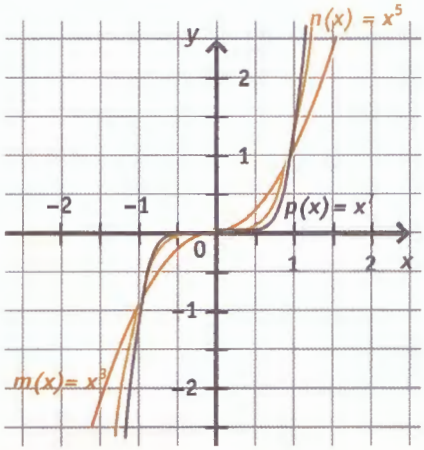

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

# Las funciones potenciales

**7** Analicen las gráficas de las funciones que están representadas.

a) Completen los cuadros que siguen.




| | Intervalos de crecimiento | Intervalos de decrecimiento |
|---|---|---|
| $f(x)$ | | |
| $g(x)$ | | |
| $h(x)$ | | |

| | Intervalos de crecimiento | Intervalos de decrecimiento |
|---|---|---|
| $m(x)$ | | |
| $n(x)$ | | |
| $p(x)$ | | |

b) Expliquen el tipo de simetría que observan en cada grupo de curvas.

.....

.....

## Para leer y recordar

- Llamamos *función potencial* a toda función cuya expresión es de la forma:

$$f(x) = a \cdot x^n \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0;\ \text{y } n \in \mathbb{N})$$

  $a$ se llama *coeficiente* de la función.

  $n$ es el exponente e indica el *grado* de la función potencial.

- El dominio de las funciones potenciales es $\mathbb{R}$.

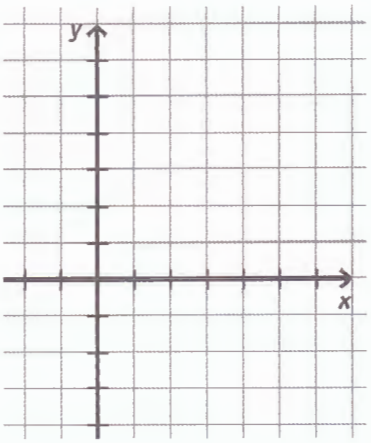
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Las funciones polinómicas

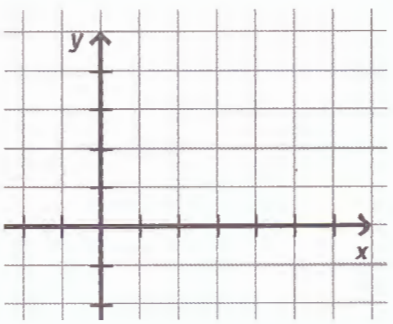
**8** Realicen las siguientes actividades.

**a)** Grafiquen aproximadamente las siguientes funciones polinómicas ayudándose con las tablas de valores.

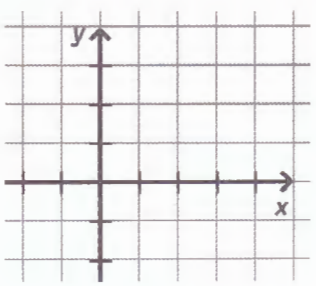
| $x$ | $f(x) = x^2 - 6x + 5$ |
|---|---|
| −1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |




| $x$ | $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ |
|---|---|
| −0,5 | |
| 0 | |
| 0,5 | |
| 2 | |
| 2,5 | |
| 3 | |
| 3,5 | |




| $x$ | $h(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2$ |
|---|---|
| −1 | |
| −0,5 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |




**b)** Completen el cuadro.

| | Punto de contacto con los ejes | |
|---|---|---|
| | eje $x$ | eje $y$ |
| $f(x)$ | | |
| $g(x)$ | | |
| $h(x)$ | | |

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Las funciones polinómicas y los polinomios

## Para leer y recordar

- Las funciones potenciales están asociadas a expresiones algebraicas de la forma $a \cdot x^n$ ($a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$), llamadas *monomios; n* indica el *grado* del monomio. Por ejemplo: el monomio $3x^5$ es de grado 5.
- Sumando funciones potenciales de distinto grado, se obtienen *funciones polinómicas.*
- Las funciones polinómicas están asociadas a expresiones algebraicas de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, llamadas *polinomios.* El grado de un polinomio es el del monomio de mayor grado.

  En este capítulo, consideraremos polinomios y funciones polinómicas de una sola variable y nos referiremos indistintamente a unos u otras.

  Por ejemplo: $2x^4 - 5x^3 + 1$ es un polinomio de grado 4.

  $x^3 + 4x$ es un binomio y $2x^4 - 5x + 1$ es un trinomio.

  dos términos — tres términos
- Se llama *polinomio nulo* al que tiene todos sus coeficientes iguales a 0. El polinomio nulo *no tiene grado.*

**9** Indiquen cuáles de las siguientes expresiones no son polinomios y expliquen por qué.

a) $A(x) = 3x + 1$

b) $B(x) = 2x^3 - 4x - 1$

c) $C(x) = \sqrt{x}$

d) $D(x) = \dfrac{x+1}{x}$

e) $E(x) = x^4 - 2x$

f) $F(x) = \dfrac{6}{x}$

g) $G(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^3}$

h) $H(x) = x^5 - \sqrt[3]{x^2}$

i) $I(x) = (x + 8) \cdot (x - 1)$

**10** Completen la tabla como en el ejemplo.

| Polinomio $P(x)$ | Grado | Coeficiente principal | Término independiente | Polinomio opuesto $-P(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2x^3 + 4x^2 + 5$ | 3 | $-2$ | 5 | $2x^3 - 4x^2 - 5$ |
| $3x + 2x^5 + 1$ | | | | |
| | | | | $-x^2 + 9$ |
| | | | | $2x^3 - 3x$ |
| | 1 | 2 | 25 | |

**11** Respondan a las preguntas.

a) ¿Cuál es el coeficiente principal de un polinomio? .....

b) ¿Cuál es el término independiente de un polinomio? .....

c) Si tenemos un polinomio $P(x)$ y queremos escribir su opuesto $-P(x)$, ¿qué tenemos que cambiar?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Adición y sustracción de polinomios

## Para observar

**Para sumar polinomios, se suman los monomios que son del mismo grado.**

**Por ejemplo:** $(-8x^3 + 5x + 3) + (4x^2 + x^3 + 3x) = (-8x^3 + x^3) + 4x^2 + (5x + 3x) + 3 = -7x^3 + 4x^2 + 8x + 3$

**En ocasiones, puede resultar conveniente disponerlos de alguna de las siguientes formas:**

$$\begin{array}{rrrrrrr} & -8x^3 & + & & & 5x & + 3 \\ + & x^3 & + & 4x^2 & + & 3x & \\ \hline & -7x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & + 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} & -8x^3 & + & 0x^2 & + & 5x & + 3 \\ + & x^3 & + & 4x^2 & + & 3x & \\ \hline & -7x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & + 3 \end{array}$$

**Para restar dos polinomios, al primero de ellos se le suma el opuesto del otro.**

**Por ejemplo:** $(x^2 + 5x - 1) - (2x^3 - 3x^2) = (x^2 + 5x - 1) + (-2x^3 + 3x^2) = -2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$

**12** Resuelvan las siguientes sumas y restas de polinomios.

a) $2x + x =$ .....

b) $3x^2 + 5x^2 =$ .....

c) $(2x + 3x^2) + (4x^2 + 1) =$ .....

d) $(3x^2 + 2x) - (5x^2 - x) =$ .....

**13** Consideren los polinomios $A(x) = 2x - x^3 + 1$; $B(x) = x^3 - 1$; $C(x) = -2x + x^3 - 1$ y $D(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$, y realicen las operaciones indicadas.

a) $A(x) + B(x)$

b) $B(x) + D(x)$

c) $[A(x) - D(x)] + [B(x) - C(x)]$

d) $A(x) + C(x)$

e) $A(x) - C(x)$

f) $D(x) + C(x) - B(x)$

**14** Escriban:

a) dos polinomios de grado 3 cuya suma sea de grado 2.

b) dos polinomios de grado 4 cuya suma sea de grado 1.

c) dos polinomios de grado 7 cuya suma sea de grado 0.

d) dos polinomios de grado 2 cuya suma no tenga grado.

**15** Se quiere romper una pared rectangular para colocar una ventana también rectangular. El largo de la pared es el doble del de la ventana, y las alturas de ambas son medio metro menores que sus respectivos largos.

a) Expresen el área de la pared que queda sin romper en función del largo de la ventana.

b) Hallen las medidas de la ventana y de la pared si el área de la pared que queda sin romper es 6 $m^2$.

**16** Se proyecta reasfaltar una pista de aterrizaje rectangular cuyo largo es 100 veces su ancho.

a) Expresen:

I. el perímetro de la pista en función de su ancho.

II. el perímetro de la pista en función de su largo.

III. el área de la pista en función de su ancho.

IV. el área de la pista en función de su largo.

b) Calculen el área de la pista si su perímetro es de 6060 m. Para estas condiciones, escriban una fórmula que permita calcular el costo total del material en función del precio del metro cuadrado de asfalto.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Multiplicación de polinomios

## Para observar

**Para multiplicar dos monomios, multiplicamos sus coeficientes y aplicamos las propiedades de la potenciación para obtener el grado.**

**Por ejemplo:** $(3x^5) \cdot (4x^6) = (3 \cdot 4) \cdot (x^5 \cdot x^6) = 12x^{5+6} = 12x^{11}$

**Para multiplicar dos polinomios, aplicamos la propiedad distributiva.**

**Por ejemplo:** $(-8x^3 + 5x + 3) \cdot (4x^2 + 3x) = -32x^5 - 24x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 12x^2 + 9x$

$= -32x^5 - 24x^4 + 20x^3 + 27x^2 + 9x$

**Cuando ambos tengan varios términos, puede resultar conveniente disponerlos de la siguiente forma:**

$$\begin{array}{rrrrr} & -8x^3 & + 5x & + 3 & \\ \times & & 4x^2 & + 3x & \\ \hline & -24x^4 & & + 15x^2 & + 9x \\ + & -32x^5 & + 20x^3 & + 12x^2 & \\ \hline & -32x^5 - 24x^4 & + 20x^3 & + 27x^2 & + 9x \end{array}$$

**17** Resuelvan.

a) $(2x^3) \cdot (-4x^2) =$ .....

b) $(3x^2) \cdot \left(\frac{1}{6}x^2\right) =$ .....

c) $(2x) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) =$ .....

d) $(3x^2 - 4x) \cdot (5x^2 + x) =$ .....

**18** Completen sabiendo que los grados de los polinomios $M$ y $N$ son 3 y 2, respectivamente.

a) El grado de $M \cdot N$ es

b) El grado de $M + N$ es

c) El grado de $M - N$ es

**19** Consideren los siguientes polinomios.

$A(x) = x^2 + 3x - 1$ $B(x) = x + 3$ $C(x) = 5x^3 - 3x + 4$ $D(x) = x - 3$

Efectúen los siguientes productos.

a) $A(x) \cdot B(x)$ c) $B(x) \cdot A(x)$ e) $B(x) \cdot B(x)$

b) $A(x) \cdot D(x)$ d) $C(x) \cdot C(x)$ f) $A(x) \cdot B(x) \cdot D(x)$

**20** Multipliquen los siguientes binomios y descubran una regla general.

a) $(x + 4) \cdot (x + 4)$ b) $(x - 4) \cdot (x - 4)$ c) $(x^3 + 6) \cdot (x^3 + 6)$ d) $(x^3 - 6) \cdot (x^3 - 6)$

**21** Multipliquen los siguientes binomios y descubran una regla general.

a) $(x + 8) \cdot (x - 8)$ b) $(x - 4) \cdot (x + 4)$ c) $(x^3 + 2) \cdot (x^3 - 2)$ d) $(x^5 - 3) \cdot (x^5 + 3)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# División entera de monomios

**22** Completen el cuadro cuando sea posible.

| | Dividendo | Divisor | Cociente | Resto | Comprobación |
|---|---|---|---|---|---|
| $10 \quad 2$<br>$0 \quad 5$ | 10 | 2 | 5 | 0 | $10 = 5 \cdot 2 + 0$ |
| | 13 | 2 | 6 | 1 | |
| | $x^5$ | $x^2$ | $x^3$ | 0 | |
| | $8x^5$ | $2x^5$ | | | |
| | $x^2$ | $x^5$ | | | |
| | 0 | $x^5$ | | | |
| | $x^5$ | 0 | | | |

**23** Analicen las operaciones que realizaron y tachen las opciones que no sean correctas.

En una división entera entre monomios, cuando el dividendo es cero, o su grado es menor que el grado del divisor, el cociente es igual *a cero, al divisor, al dividendo,* y el resto es igual *a cero, al divisor, al dividendo.* Como en toda división, el divisor no puede ser *cero, de grado cero, de grado 1.*

**24** Efectúen las divisiones enteras, cuando sea posible, e indiquen el cociente y el resto en cada caso.

a) $(-4x^3) : (2x^2)$ Cociente: ..... Resto: .....

b) $(8x^9) : \left(\frac{1}{8}x^9\right)$ Cociente: ..... Resto: .....

c) $0 : (2x^6)$ Cociente: ..... Resto: .....

d) $(2x) : \left(\frac{1}{2}x^2\right)$ Cociente: ..... Resto: .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# División entera de polinomios

## Para observar

Sea $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 - 2$ para calcular $P(x) : Q(x)$, podemos hacer así:

- Ordenamos en forma decreciente y completamos el polinomio dividendo.
- Dividimos el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor: $(4x^3) : (x^2) = 4x$.
- Multiplicamos este resultado por el divisor y lo escribimos debajo del dividendo con los signos cambiados para poder sumarlos.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +\ 5x^2 & +\ 0x & +\ 1 & x^2 - 2 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & & +\ 8x & & 4x + 5 \\
\cline{1-4}
\cancel{0x^3} & +\ 5x^2 & +\ 8x & +\ 1 & \downarrow \\
 & -5x^2 & & +\ 10 & \text{cociente} \\
\cline{1-4}
 & \cancel{0x^2} & +\ \underbrace{8x}_{\text{resto}} & +\ 11 &
\end{array}
$$

- Repetimos el procedimiento hasta obtener un resto de menor grado que el divisor.
- Comprobamos que: $P(x) = C(x) \cdot D(x) + R(x)$, es decir que: $4x^3 + 5x^2 + 1 = (4x + 5)(x^2 - 2) + (8x + 11)$.

**25** Resuelvan las siguientes divisiones. Indiquen el cociente y el resto de cada una y realicen la comprobación.

a) $(3x^2 + 2x - 1) : (4x)$ b) $(6x^3 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$ c) $(4x^2 + 5x - 6) : (2x + 4)$

**26** Realicen las siguientes actividades.

a) $M$ y $N$ son polinomios. Si el grado de $M$ es 7 y el grado de $N$ es 2, ¿cuál es el grado del cociente entero entre $M$ y $N$? .....

b) Si el grado del cociente entre dos polinomios $M$ y $N$ es 4, ¿cuál es la relación entre los grados de $M$ y $N$? .....

**27** Indiquen si cada afirmación es verdadera o falsa y justifiquen la respuesta.

a) $(x - 1)$ es divisor de $(x^3 + 2x - 3)$.

.....

b) $(x^4 + 3x^2 - 4)$ es múltiplo de $(x + 1)$.

.....

c) $(x^2 + 3x - 1)$ divide a $(x^3 + 3x^2 - x)$.

.....

d) El resto de dividir $(x^4 + 16)$ por $(x - 2)$ es cero.

.....

e) La división $(3x^3 + 8x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$ es exacta.

.....

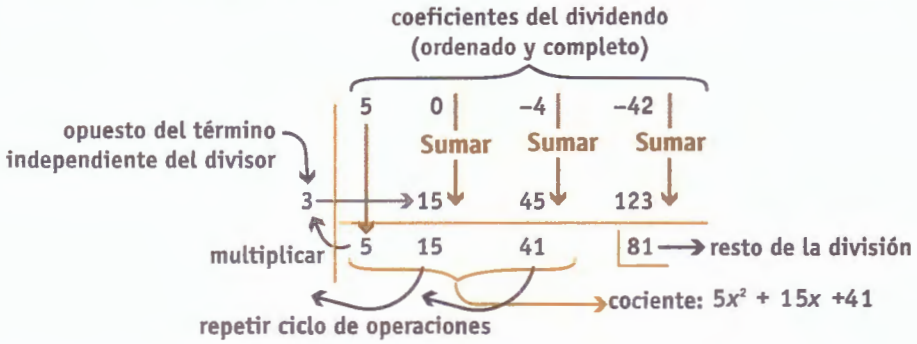
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

## La regla de Ruffini

### Para leer y recordar

La *regla de Ruffini* es un método "abreviado" de efectuar la división de ciertos polinomios, que se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - a$, siendo $a$ un número real.

En el ejemplo, se muestra cómo se aplica para resolver la división: $(5x^3 - 4x - 42) : (x - 3)$.




El cociente siempre resulta de un grado menor que el dividendo.

**28** Utilicen la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones. Indiquen el cociente y el resto en cada caso y realicen la comprobación.

a) $(8x^2 - 3x + 4) : (x - 4)$
b) $(5x^2 - 1) : (x - 5)$
c) $(x^3 - 3x - 30) : (x + 2)$
d) $(1 + x^2) : (x - 1)$
e) $(x^2 + x^3 - 2) : (x + 3)$
f) $(10x^3 - 6) : (x + 3)$
g) $(10x + x^2 + 25) : (x + 5)$
h) $(x^4 - 81) : (3 + x)$

## Valor de un polinomio para $x = a$. Raíz de un polinomio

### Para leer y recordar

- Llamamos *valor de un polinomio para* $x = a$, y lo escribimos $P(a)$, al número que resulta al reemplazar por el número $a$ la variable $x$ del polinomio y resolver todas las operaciones indicadas.
- Si $P(a)$ es cero, decimos que $a$ es *raíz* de $P(x)$, y recíprocamente, si $a$ es *raíz* de $P(x)$, entonces $P(a) = 0$.

Ejemplo: $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$P(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 5$ $\quad$ $P(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5$

$P(-1) = -4 \Rightarrow$ no es raíz de $P(x)$ $\quad$ $P(1) = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$

**29** Consideren los siguientes polinomios.

$P(x) = x^2 - 5x + 4$ $\quad$ $R(x) = -4x^2 + 10x - 4$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$ $\quad$ $S(x) = 16x^4 + 8x + 3$

Hagan los cálculos necesarios e indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) $P(0) = 4$
b) $Q(1) = 6$
c) $P(1) = Q(-1)$
d) $S(1) = 9 \cdot Q(-1)$
e) $R(0) = -P(0)$
f) $R(3) + P(-1) = R\left(\frac{1}{2}\right)$
g) $S(1) - S(-1) = P(-1) - Q(1)$
h) 0 es raíz de $R$.
i) $-4$ no es raíz de $S$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Teorema del resto

## Para leer y recordar

**Si dividimos un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, el resto de dicha división es igual a $P(a)$, es decir, al valor de $P(x)$ en $x = a$.**

$$\begin{array}{r|l} P(x) & (x-a) \\ \hline R & Q(x) \end{array} \Rightarrow Q(x) \cdot (x-a) + R = P(x)$$

Reemplazando todas las $x$ por $a$.

$$Q(a) \cdot (a-a) + R = P(a)$$
$$Q(a) \cdot 0 + R = P(a)$$
$$R = P(a)$$

**El teorema del resto es muy útil porque permite calcular directamente el resto de una división sin hacerla y, en particular, anticipar si una división es exacta.**

**30** Calculen el resto de las siguientes divisiones sin hacerlas.

a) $(5x^2 + 3x - 14) : (x - 2)$ .....

b) $(4x^2 - 3) : (x - 5)$ .....

c) $(x^3 + x - 5) : (x + 2)$ .....

d) $(1 + x^4) : (x - 4)$ .....

e) $(x^2 + x^3 - 2) : (x + 1)$ .....

f) $\left(x^3 - \frac{1}{27}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$ .....

g) $(16x + x^2 + 64) : (x + 8)$ .....

h) $(x^4 - 16) : (2 + x)$ .....

**31** Unan con flechas cada polinomio con su raíz o sus raíces.

| | |
|---|---|
| $A(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2$ | $-2$ |
| | $-1$ |
| | $0$ |
| $B(x) = x^2 - 16$ | $1$ |
| | $2$ |
| | $3$ |
| $C(x) = 3x^6 - 3$ | $4$ |

**32** Calculen, en cada caso, el o los valores de $m$ para que la división sea exacta.

a) $(x^2 + 3x - m) : (x + 2)$ .....

b) $(x^2 + mx - 5) : (x + 1)$ .....

c) $(x^2 + x - 6) : (x - m)$ .....

d) $(x^3 - m) : (x - 1)$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Factorización de polinomios

## Para leer y recordar

- El proceso de transformar un polinomio en un producto de otro polinomio se llama *factorización*. En muchas ocasiones, factorizar un polinomio resulta útil para resolver ecuaciones, simplificar expresiones algebraicas y para trabajar con funciones polinómicas.
- Para factorizar polinomios, se aplican diversos recursos algebraicos, algunos de los cuales analizamos a continuación.

## Factor común

**33** Completen como en el ejemplo.

a) $a \,.\, (b + c) = ab + ac$

b) $pl + pq = p \,.\, (\ldots\ldots)$

c) $d\ (\ldots\ldots) = d + dg$

d) $10x + 40 = 10\ (\ldots\ldots)$

e) $x^2 + x = x\ (\ldots\ldots)$

f) $x^3 + x^2 = x^2\ (\ldots\ldots)$

g) $2x^4 - 3x^3 = x^3\ (\ldots\ldots)$

h) $10x^4 - 2x^3 + 4x^2 = 2x^2\ (\ldots\ldots)$

i) $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{8}x^3 = \frac{1}{2}x\ (\ldots\ldots)$

**34** Saquen el factor común, cuando sea posible.

a) $x^3 + x$

b) $x^7 + 5x^5 - 3x^4$

c) $4 \,.\, (4x - 3)^3 - x \,.\, (4x - 3)^2 + 5x^2 \,.\, (4x - 3)^7$

d) $3x^6 + 18$

e) $x \,.\, (x + 1) + 3 \,.\, (x + 1)^2$

f) $10x^5 + 15x^4 - 5x^3 + 10x^2$

g) $6x^2 + 5x - 1$

**35** Calculen el valor de $m$ para que se verifique la igualdad en cada caso.

a) $5x^3 \,.\, (4x^5 + m) = 20x^8 + 35x^3$

b) $x \,.\, [x^2 + (m + 1)] = x^3 - 4x$

## Polinomios de segundo grado

### Para leer y recordar

Los polinomios de grado 2 que tienen raíces reales se pueden expresar en forma factorizada, según la siguiente igualdad:

$P(x) = ax^2 + bx + c = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$ donde $x_1$ y $x_2$ son las raíces de $P(x)$.

**36** Completen el cuadro.

| $P(x) = ax^2 + bx + c$ | $a$ | $x_1$ | $x_2$ | $P(x) = a\ (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + x + 2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1\ (x + 1)\ (x - 2)$ |
| $2x^2 - 3x - 5$ | | | | |
| | $-2$ | $3$ | $3$ | |
| | | | | $3\ (x + 5)\ (x - 5)$ |

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

# Otros casos

## Para observar

### Diferencia de cuadrados

Llamamos *diferencia de cuadrados* a un binomio (polinomio de dos términos) que tiene la forma: $x^2 - a^2$.

Estos polinomios tienen la ventaja de poder expresarse como *producto de la suma de las bases a y b por la diferencia de las bases a y b,* es decir:

$$x^2 - a^2 = (x - a)\ (x + a)$$

Ejemplos:

$$x^2 - 4 = (x + 2)\ .\ (x - 2)$$

$$x^6 - 36 = (x^3)^2 - 6^2 = (x^3 + 6)\ (x^3 - 6)$$

### Trinomio cuadrado perfecto

Llamamos *trinomio cuadrado perfecto* a un polinomio de tres términos que proviene de haber desarrollado el *cuadrado de un binomio.*

Reconocemos que un trinomio es cuadrado perfecto cuando tiene esta forma:

$$a^2 + 2\ .\ a\ .\ b + b^2$$

Y lo factorizamos expresándolo como el cuadrado del binomio del cual proviene:

$$a^2 + 2\ .\ a\ .\ b + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplos:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2\ .\ 5\ .\ x + 5^2 = (x + 5)^2$$

$$x^6 - 6x^3 + 9 = (x^3)^2 + 2\ .\ (-3)\ .\ x^3 + (-3)^2 = (x^3 - 3)^2$$

**37** Descubran cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son diferencias de cuadrados, y a las que lo sean, exprésenlas como producto de la suma por la diferencia de las bases.

a) $x^4 - 25 =$ ..... c) $64x^6 - 9 =$ ..... e) $x^4 + 9 =$ .....

b) $169 - x^{10} =$ ..... d) $-225 + x^8 =$ ..... f) $4x^{20} - 1 =$ .....

**38** Expresen los siguientes trinomios como cuadrados de binomios cuando sea posible.

a) $x^4 + 4x^2 + 1 =$ ..... d) $x^6 - 6x^3 - 9 =$ .....

b) $x^{12} + 10x^6 + 25 =$ ..... e) $4x^2 - 24x + 36 =$ .....

c) $x^8 - 12x^4 + 36 =$ ..... f) $81 - 18x + x^2 =$ .....

**39** Expresen el área de la figura.

a) Como el área del cuadrado mayor.

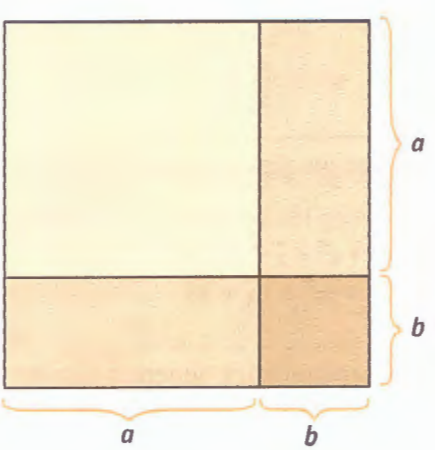
.....

b) Como la suma de las áreas de las figuras en las que está subdividida.

.....

c) Comparen ambos resultados.

.....




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros

## Para leer y recordar

Para factorizar polinomios de coeficientes enteros y grado mayor que 2, es muy útil tener en cuenta la siguiente propiedad, que se desprende del teorema de Gauss:

*Las posibles raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros, si $a_n$ es el coeficiente principal y $a_0$ su término independiente, tienen la forma $\frac{p}{q}$, siendo p divisor de $a_0$ y q divisor de $a_n$.*

Por ejemplo, para factorizar el polinomio $M(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$ aplicando esta propiedad, podemos hacer así:

- Escribimos todos los divisores del término independiente: $P = \{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$.
- Escribimos todos los divisores del coeficiente principal: $Q = \{1, 3, -1, -3\}$.
- Las posibles raíces racionales de $M(x)$ son los cocientes que podamos formar entre un número del conjunto $P$ y otro del conjunto $Q$, es decir: $1; -1; 2; -2; 4; -4; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}$.
- Calculamos el valor de $M(x)$ en estos números hasta encontrar uno que sea raíz.
- Al encontrar una raíz, ya podemos escribir un divisor de $M(x)$.
- $x = -\frac{1}{3}$ *es raíz de* $M(x) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)$ *es divisor de* $M(x)$.
- Dividimos $M(x) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$ (usamos Ruffini). ⟶

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{3}$ | 3 | 1 | −12 | −4 |
| | | −1 | 0 | 4 |
| | 3 | 0 | −12 | 0 |

- Al plantear la comprobación de la división (sin resolverla), vemos que ya hemos logrado expresar $M(x)$ como producto de otros dos polinomios. ⟶ $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = (3x^2 - 12) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$
- Obtuvimos un factor de segundo grado; lo factorizamos, si es posible, con los recursos que ya conocíamos. ⟶ $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 3(x + 2)(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

**40** Factoricen los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 8x^2 + 11x + 20 =$ .....

b) $x^3 - x^2 - 64x + 64 =$ .....

c) $x^4 + 11x^3 + 41x^2 + 61x + 30 =$ .....

d) $\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 12x - 18 =$ .....

**41** Realicen las siguientes actividades.

a) Factoricen los siguientes polinomios.

I. $x^3 + x^2 + x - 3$

II. $x^3 + 5x^2 + 5x + 25$

III. $x^4 + 3x^2 - 4$

IV. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

b) ¿Qué característica tienen en común estos polinomios factorizados?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Grado y raíces de un polinomio

## Para leer y recordar

- Todo polinomio de una variable y de grado $n$ que tenga $n$ raíces reales puede factorizarse como

  $a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_n)$, siendo $a_n$ el coeficiente principal y $x_1, x_2 \ldots x_n$ sus raíces.

  ↗ factor asociado a la raíz $x_n$

- La *multiplicidad* de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece, en su expresión factorizada, el factor asociado a dicha raíz.

  Por ejemplo: Si $P(x) = 3\ (x - 1)\ (x + 2)^3\ (x - 5)^2$, en $P$, 1 es *raíz simple*, $-2$ es raíz triple o de *multiplicidad* 3 y 5 es raíz doble o de *multiplicidad* 2.

**42** Completen la siguiente tabla.

| $P$ factorizado | Grado de $P$ | Raíces reales de $P$ | Multiplicidad de cada raíz |
|---|---|---|---|
| $(x - 3) \cdot (x + 6)$ | | | |
| | | | |
| $(x + 5) \cdot (x + 5) \cdot (x - 6)$ | 3 | $x = -5$ | 2 |
| | | $x = 6$ | 1 |
| $(x + 4) \cdot (x + 4) \cdot (x + 4)$ | | | |
| $(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^3$ | | | |
| | | | |
| $x \cdot (x + 2)^5 \cdot (x - 3)^4$ | | | |
| | | | |
| | | | |

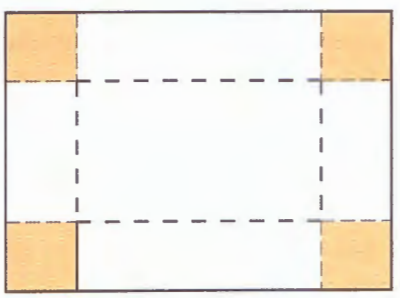
**43** Con el objeto de ordenar sus CD, César quiere construir una caja con forma de prisma sin tapa. Para ello, cuenta con un cartón duro rectangular de 60 cm de largo por 45 cm de ancho, al que le corta un cuadrado en cada esquina.

a) Encuentren una expresión que sirva para calcular el volumen de la caja armada en función de la medida del lado de cada cuadrado cortado.

.....

b) Indiquen cuál es el dominio, en esta situación, de la función polinómica asociada a dicha expresión.

.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

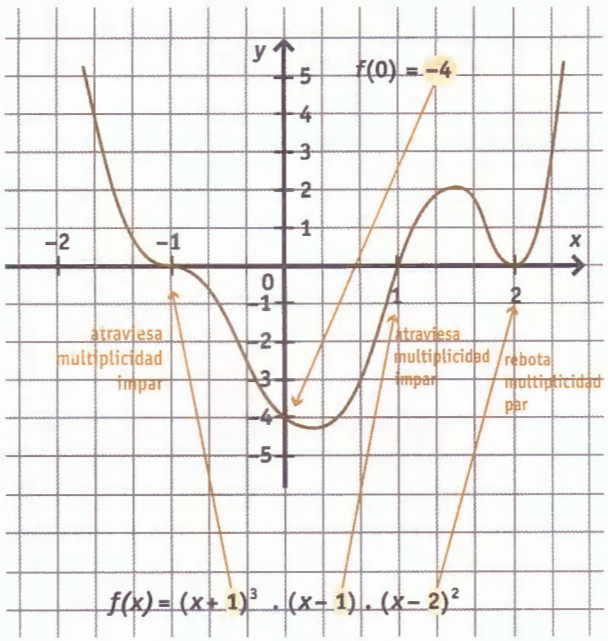
# Las funciones polinómicas y sus gráficas

## Para observar

**Podemos obtener una representación gráfica aproximada de una función polinómica, sin hacer una tabla con muchos valores, teniendo en cuenta que:**

- **El dominio es $\mathbb{R}$, y es continua.**
- **La ordenada al origen, $f(0)$, es el término independiente.**
- **La curva tiene contacto con el eje de las abscisas en los puntos en los que $x = r$, donde $r$ es cada raíz real del polinomio. Si la multiplicidad de $r$ es *impar*, la curva "atraviesa" el eje $x$; si la multiplicidad es *par*, la curva "rebota" sin atravesarlo.**
- **Entre raíces consecutivas, las imágenes de la función son todas positivas o todas negativas.**
- **A la derecha (izquierda) de la mayor (menor) de las raíces, las imágenes de la función son todas positivas o todas negativas.**

**Ejemplo: observen la gráfica de**
**$f(x) = (x - 2)^2 (x - 1) (x + 1)^3$**



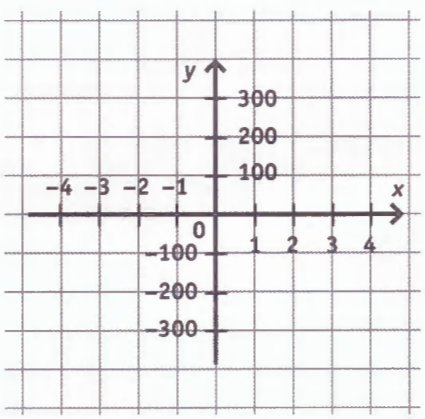

**44** Grafiquen en forma aproximada la función $F(x) = 2\,(x-1)\,(x+2)^2\,(x-3)^3$ siguiendo los pasos propuestos.

a) Las raíces de $F$ son: .....
Marquen las raíces en el eje $x$.

Calculen $F(0)$ = .....

b) Marquen el punto de corte con el eje de ordenadas.

c) Tracen la curva aproximadamente, teniendo en cuenta la multiplicidad de las raíces.




**45** Realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ c) $h(x) = x^4\,(x^2 - 9)$

**46** Hallen los puntos de contacto de las siguientes funciones polinómicas con los ejes coordenados.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 8$ b) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Conjuntos de positividad y de negatividad

## Para observar

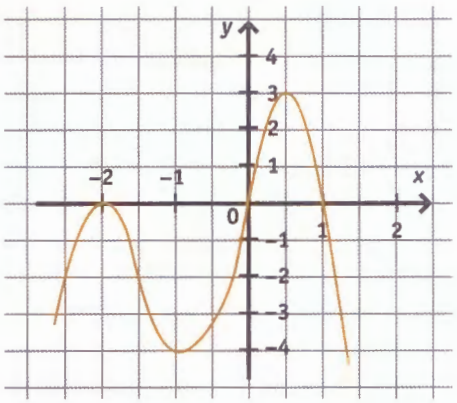
Para obtener los intervalos de positividad y de negatividad de la función $f(x) = -2x(x - 1)(x + 2)^2$, podemos hacer así:

- Como sus raíces son 0, 1 y −2, dividimos en intervalos el *dominio* tomando como "extremos" dichos valores y averiguamos el signo de las imágenes en cada intervalo evaluando el polinomio en un número cualquiera de dicho intervalo.

| | $(-\infty; -2)$ | $-2$ | $(-2; 0)$ | $0$ | $(0; 1)$ | $1$ | $(1; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor de $a$ tomado | $-3$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ |
| Signo de $f(a)$ | $(-)$ | | $(-)$ | | $(+)$ | | $(-)$ |

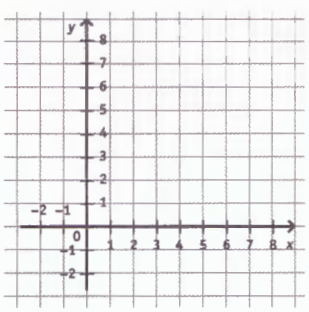
- Cuando $f(a)$ haya resultado positivo, el gráfico de la función estará por encima del eje $x$, y el intervalo en cuestión formará parte del conjunto de positividad.
- Si $f(a)$ resulta negativo, el gráfico de la función estará por debajo del eje $x$, y el intervalo en cuestión formará parte del conjunto de negatividad.

En este caso, $C^+ = (0; 1) \cup (-2; 0) \cup (1; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; -2)$.
Utilizando estos datos, podemos construir una gráfica aproximada más ajustada.

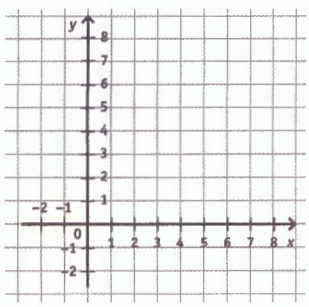



**47** Utilizando los puntos de contacto con los ejes y los intervalos de positividad y negatividad, realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones.

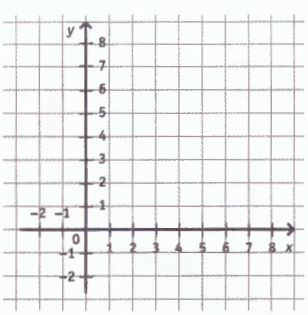
a) $f(x) = x^3 - x^2$



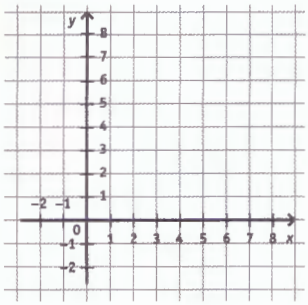
b) $g(x) = x^3 - x$



c) $h(x) = -x^4 + x^2$



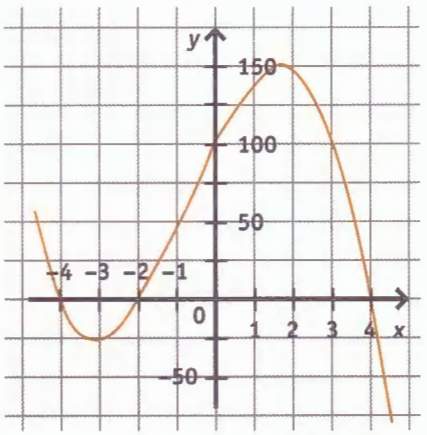
d) $j(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Reconstrucción de fórmulas polinómicas a partir de sus gráficas

**48** La siguiente gráfica corresponde a una función polinómica de grado 3.




a) Completen.

Sus raíces son:

$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

La expresión general de una función cúbica es:

$f(x) = a \,.\, (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

En este caso, tenemos:

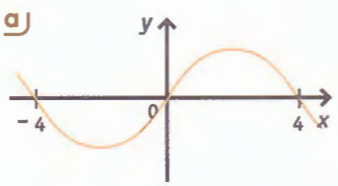
$f(x) = a \,.\, (x \,.....)(x \,.....)(x \,.....)$ (I)

b) Otro punto que pertenece a la gráfica es el (0; 100). Reemplazando $x = 0$ y $f(0) = 100$ en la expresión (I), obtengan el valor de $a$ y escriban la fórmula de la función.

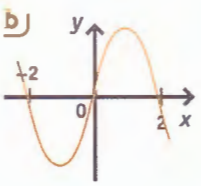
.....

**49** Inés realizó, en forma aproximada, las siguientes gráficas. Averigüen cuál de las fórmulas le corresponde a cada una.

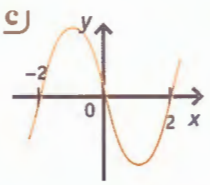
a)



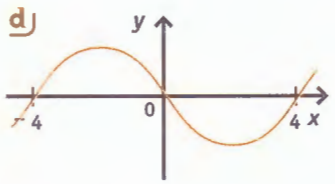

b)




c)




d)




I. $f(x) = -x(x + 4) \,.\, (x - 4)$

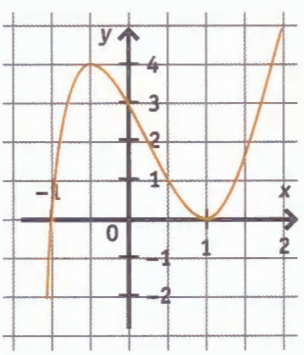
II. $f(x) = x \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 2)$

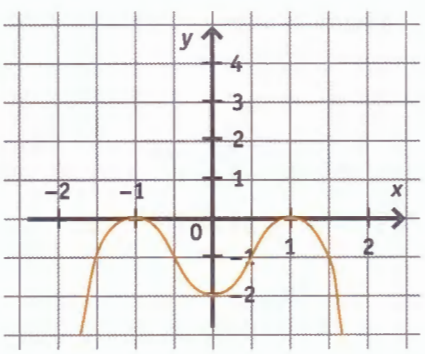
III. $f(x) = x^3 - 16x$

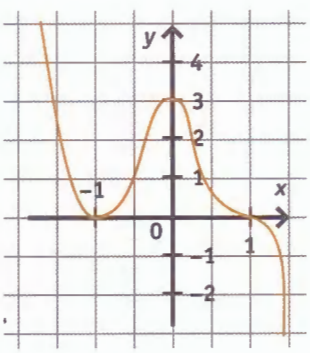
IV. $f(x) = -x \,.\, (x - 2) \,.\, (x + 2)$

**50** Hallen la fórmula de cada una de las funciones que aparecen en los gráficos.

a) Grado 3. b) Grado 4. c) Grado 5.




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# La factorización de polinomios como herramienta para resolver ecuaciones

## Para observar

Recordemos que: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

Para resolver la ecuación $x^4 - 9x^2 = 0$, podemos factorizar la expresión polinómica que tenemos en el primer miembro:

$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x + 3)(x - 3)$

Entonces, $x^2(x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 = 0}_{x = 0}$ ó $\underbrace{(x + 3) = 0}_{x = -3}$ ó $\underbrace{(x - 3) = 0}_{x = 3}$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones, obtenemos las soluciones de la ecuación original.

Las soluciones de la ecuación son: 0, 3 y −3.

**51** Hallen, sin usar el lápiz y el papel, las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$

.....

b) $(x + 4) \cdot (2x - \sqrt{2}) = 0$

.....

c) $x \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 9) = 0$

.....

d) $-2(x^2 - 1) \cdot (x + 6) = 0$

.....

**52** Usen la factorización de polinomios para resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$.

a) $x^3 + 6x^2 + x + 6 = 0$

.....

.....

.....

b) $x^3 + 10x^2 - 4x - 40 = 0$

.....

.....

.....

c) $12x^3 - 3x = (5 - x)^2 + 10x \cdot \left(1 + \frac{3}{10}x\right) - 26$

.....

.....

.....

d) $5x \cdot (x - 1) = 6 - 2 \cdot (4x^3 - 1)$

.....

.....

.....

**53** Un número entero es tal que el cubo del siguiente disminuido en el cuádruplo del cuadrado del anterior da como resultado treinta veces el número más dos. Averigüen si es primo.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Los polinomios y las raíces no reales

**54** Encuentren las soluciones reales y/o complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^3 + 9x = 0$

## Para observar

- Las ecuaciones cuadráticas de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ pueden, como se sabe, resolverse en general mediante la fórmula resolvente: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c}}{2 \,.\, a}$.
- Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c < 0$), las soluciones son dos números complejos conjugados.
- Un polinomio de segundo grado de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ en el cual $b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c < 0$ no se anula para ningún valor de $x$, y en consecuencia, su gráfica no se interseca con el eje $x$ de las abscisas y está toda por encima de dicho eje (si $a > 0$) o toda por debajo (si $a < 0$).

**55** Encuentren los valores de $k$ para que las siguientes funciones polinómicas no tengan raíces reales.

a) $f(x) = x^2 - 5x + k$ b) $f(x) = x^2 - 5x + k$ c) $f(x) = x^2 - 5x + k$

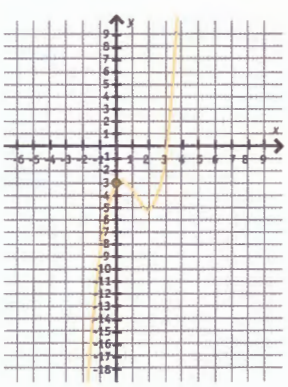
**56** Encuentren una condición necesaria y suficiente para que una función polinómica de grado 2 tenga o conjunto de positividad vacío o conjunto de negatividad vacío.

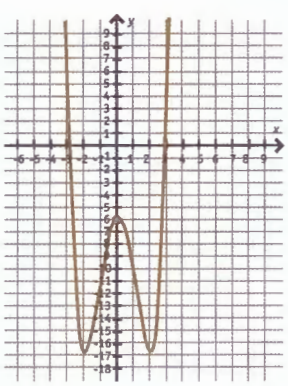
**57** Verifiquen que $x = ai$ es raíz de $f(x) = x^2 + a^2$ y obtengan conclusiones con respecto al valor de $a$.

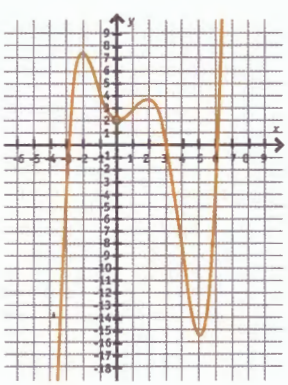
**58** Completen la tabla:

| $f(x)$ | Número de raíces reales | Número de raíces no reales |
|---|---|---|
| $x^2 + 1$ | | |
| $x^3 + 1$ | | |
| $x^4 + 1$ | | |
| $x^5 + 1$ | | |

**59** Los gráficos corresponden a funciones polinómicas de grado mínimo que incluyen entre sus raíces $x = -i$. Escriban la expresión factorizada de cada una.







© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# El cambio de variable en la resolución de ecuaciones

**60** Sea la ecuación $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, donde $n$ es un número natural y $a \neq 0$.

a) Si $n = 1$, ¿qué tipo de ecuación encuentran?

b) Completen la siguiente frase: la función polinómica asociada a esta ecuación para $n = 2$ es $f(x) =$....., y su grado es ..... . En cambio, la función polinómica asociada a esta ecuación para $n = 3$ es $f(x) =$ ....., y su grado es ..... .

## Para observar

**La ecuación $x^4 - 5x^2 + 4$ puede resolverse haciendo el cambio de variable $x^2 = z$. Así resulta que: $x^4 = (x^2)^2 = z^2$.**

**Reemplazando en la ecuación anterior queda la forma cuadrática $z^2 - 5z + 4 = 0$ cuya solución se puede obtener como $z = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$; o sea luego se sustituye en el cambio de variable:**

**Para $z_1 = 4$ resulta $x^2 = 4$, por lo tanto $x_1 = 2$ ó $x_2 = -2$.**

**Para $z_2 = 1$ resulta $x^2 = 1$, por lo tanto $x_3 = 1$ ó $x_4 = -1$.**

**Finalmente $\{2; -2; 1; -1\}$ es el conjunto solución de la ecuación.**

**61** Sea la ecuación $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$, utilicen un cambio de variable adecuado para transformarla en una ecuación cuadrática y hallen las soluciones reales.

.....

.....

**62** Resuelvan las siguientes actividades.

a) Enuncien la propiedad utilizada que permite escribir $x^{2n} = (x^n)^2$.

.....

.....

b) Inventen una ecuación del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga entre sus soluciones a $x = 2$ y a $x = -3$.

.....

.....

c) Inventen una ecuación del tipo $ax^6 + bx^3 + c = 0$ que tenga entre sus soluciones a $x = 4$.

.....

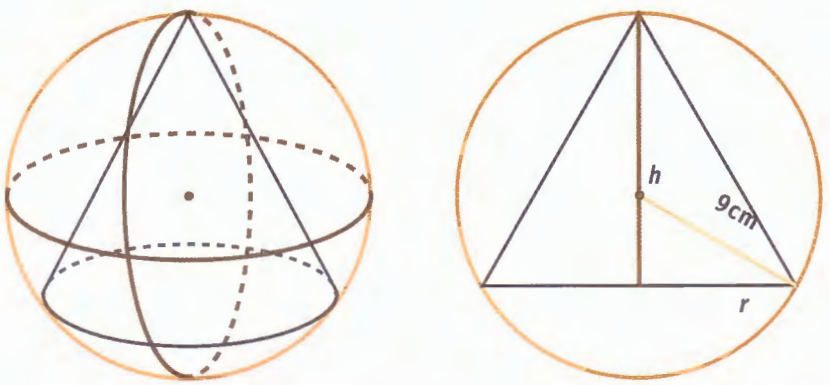
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**63** Completen la tabla.

| Ecuación para resolver | Cambio de variable | Ecuación resultante por el cambio de variable | Soluciones de la ecuación anterior | Soluciones de la ecuación para resolver |
|---|---|---|---|---|
| a) $x^2 + 3x^2 - 4 = 0$ | | | | |
| b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ | | | | |
| c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ | | | | |
| d) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ | | | | |
| e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ | | | | |
| f) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$ | | | | |

**64** El siguiente esquema muestra un corte transversal de un cono inscripto en una esfera.




a) El volumen de un cono de radio $r$ y altura $h$ se calcula por medio de la fórmula

$$V_c = \frac{1}{3} . \pi . r^2 . h$$

Encuentren una función polinómica con coeficientes reales exactos que exprese el volumen de un cono circular recto, inscripto en una esfera de 9 cm radio, en función de $h$.

b) Hallen el dominio de la función volumen en el contexto del problema.

c) El volumen de una esfera de radio $R$ se calcula por medio de la fórmula:

$$V_e = \frac{4}{3} . \pi . R^3$$

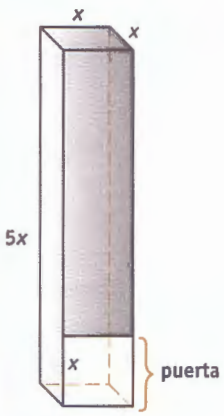
Hallen, en función de $h$, la función polinómica con coeficientes reales exactos que exprese la diferencia entre el volumen de la esfera y el volumen del cono.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Los polinomios en la construcción de un ascensor

Algunas empresas de subterráneos empezaron a considerar de fundamental importancia la colocación de ascensores para uso exclusivo de personas discapacitadas (en las bocas de subte). En la mayoría de los casos, concretar esta tarea requiere un alto costo con características de distinta naturaleza, por lo cual se suelen establecer convenios con marcas conocidas, que cubren los costos de materiales e instalación a cambio de espacios publicitarios en todo el recorrido de la línea.

**65** En el caso que vamos a considerar, los constructores han establecido que por cada ascensor para colocar se tiene que excavar, desde la vereda, un hueco con forma de prisma recto, de base cuadrada de $x$ metros de lado y profundidad igual al quíntuplo de la base. La base y las paredes del hueco deben estar totalmente cubiertas con cemento y deben llevar, además, a lo largo de sus cuatro aristas verticales, potentes vigas de hierro para evitar su distorsión; una superficie cuadrada igual a la base debe quedar libre para la puerta.
Para presupuestar la obra, se consideran los siguientes costos.




| Materiales | Costo |
|---|---|
| Uso de máquina excavadora | $120 el metro cúbico para excavar |
| Cemento | $200 el metro cuadrado |
| Vigas de hierro | $60 el metro |

Se arma una fórmula polinómica que permita calcular el costo total $C(x)$ en función de la medida del lado de la base, que tiene los siguientes componentes:

$C(x)$ = *costo de máquina excavadora* + *costo de cemento* + *costo de vigas de hierro*

**a)** Hagan un esquema de la situación y, en función de la medida del lado de la base, encuentren expresiones para:

- el costo de la máquina excavadora.
- el costo del cemento.
- el costo de las vigas de hierro.
- el costo total.

**b)** Calculen las dimensiones del hueco del ascensor para que el costo total sea de $55 800.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Funciones polinómicas que permiten estimar costos

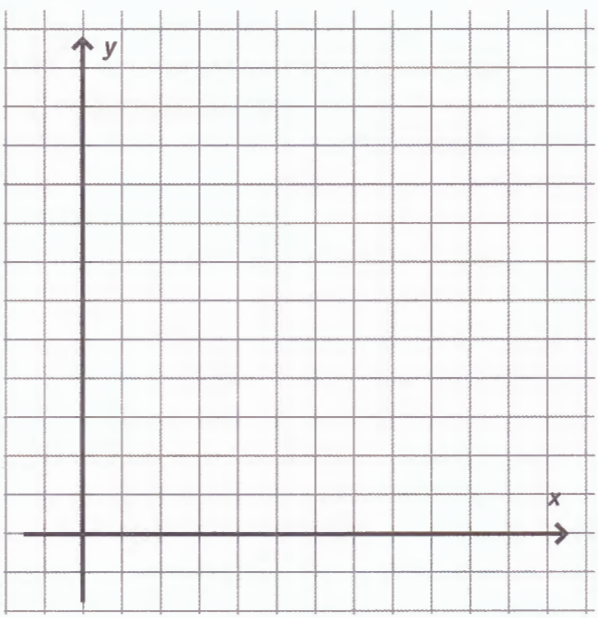
**66** Una empresa que construye torres para sostener teleféricos tiene que montar una serie en los centros de esquí Chapelco y Las Leñas. Este trabajo tiene un costo fijo, pero la altura sobre el nivel del mar dificulta el transporte de materiales, su uso y su construcción. Por tal motivo, se tiene en cuenta un costo adicional por cada torre.

Estudios hechos sobre la base de tareas de características similares determinaron que ese costo adicional (en pesos) está dado por la función polinómica: $C(a) = 100a^2 + 238a$, donde $a$ indica la altura en kilómetros sobre el nivel del mar. Esta fórmula se considera válida para valores positivos de $a$ que no superen los 4 km.

**a)** Expresen simbólicamente el dominio de la función en el contexto de esta situación y represéntenla gráficamente para estos valores.

.....

.....




**b)** Calculen cuál será el costo adicional que se tendrá que abonar a la empresa por una torre en un centro de esquí a 1790 m sobre el nivel del mar.

.....

.....

**c)** ¿Qué diferencia de altura hay entre dos torres que cuestan $653,63 y $555,35, respectivamente?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# MÁS ACTIVIDADES

**67** Encuentren $a$, $b$ y $c$ para que:
$P(x) \,.\, Q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, siendo
$P(x) = ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = x - 1$

**68** Dado el polinomio $mx^3 + (n^2 - 1)x^2 - px + 2$, establezcan condiciones sobre los números $m$, $n$ y $p$ para que el polinomio sea de grado:

a) tres. b) dos. c) uno.

**69** Consideren los siguientes polinomios.
$A(x) = 3x^2 - 5x + 2$
$B(x) = (m + n)\,x^2 + (m - n)\,x + p$
Hallen los valores de $m$, $n$ y $p$ para que los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ sean:

a) iguales. b) opuestos.

**70** Consideren los siguientes polinomios.
$P(x) = 3x^2 - 1$ $\quad Q(x) = x + 1$
$R(x) = 4x^3 + x^2$ $\quad S(x) = x^2 - 2x + 1$
Efectúen las operaciones indicadas en cada caso.

a) $P(x) \,.\, Q(x) + R(x)$
b) $S(x) \,.\, [Q(x)]^2$
c) $P(x) \,.\, S(x) - Q(x) \,.\, R(x)$
d) $[3 \,.\, P(x) + R(x)] : Q(x)$

**71** Factoricen los siguientes polinomios.

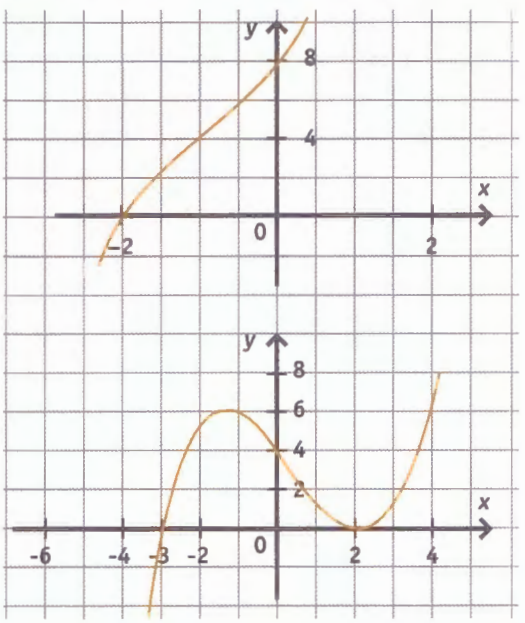
a) $2x^2 + 5x - 3$
b) $x - x^5$
c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
d) $x^4 - 5x^2 + 4$
e) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$
f) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

**72** Sabiendo que la función polinómica $P(x) = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 12x + b$ cumple la condición $P(-2) = 0$, encuentren el valor de $b$ y todos los puntos donde el gráfico hace contacto con los ejes.

**73** De cada una de las siguientes funciones polinómicas, hallen las raíces reales y su multiplicidad, indiquen las coordenadas de los puntos de contacto con los ejes, escriban los conjuntos de positividad y negatividad y representen gráficamente.

a) $f(x) = (x - 4)^3$
b) $f(x) = (x - 1)^2 \,.\, (x + 4)$
c) $f(x) = \frac{1}{9}\,(x^2 - 9)^2$
d) $f(x) = \frac{100}{9}\,(x + 3)^2 \,.\, (x - 2)$
e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
f) $f(x) = 36x^3 - 9x$
g) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2$
h) $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$
i) $f(x) = x^4 - 25x^2$

**74** Reconstruyan las fórmulas de las funciones polinómicas de grado 3 que están representadas en los siguientes gráficos.




© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**75** Resuelvan las ecuaciones utilizando un cambio de variable adecuado y completen la tabla.

| Ecuación | Soluciones reales | Soluciones no reales | Número de soluciones reales | Número de soluciones no reales |
|---|---|---|---|---|
| a) $4x^4 - 325x^2 + 81 = 0$ | | | | |
| b) $4x^4 - 323x^2 - 81 = 0$ | | | | |
| c) $4x^4 + 323x^2 - 81 = 0$ | | | | |
| d) $4x^4 + 325x^2 + 81 = 0$ | | | | |
| e) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ | | | | |
| f) $x^4 - 3x^2 = 0$ | | | | |
| g) $x^4 + 1 = 0$ | | | | |

**76** Resuelvan las ecuaciones utilizando un cambio de variable adecuado y completen la tabla.

| Ecuación | Soluciones reales | Número de soluciones reales | Número de soluciones no reales |
|---|---|---|---|
| a) $8x^6 - 217x^3 + 27 = 0$ | | | |
| b) $8x^6 - 215x^3 - 27 = 0$ | | | |
| c) $8x^6 + 215x^3 - 27 = 0$ | | | |
| d) $8x^6 + 217x^3 + 27 = 0$ | | | |

**77** Factoricen las siguientes funciones polinómicas y decidan cuáles tienen raíces no reales.

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - 8x + 8$

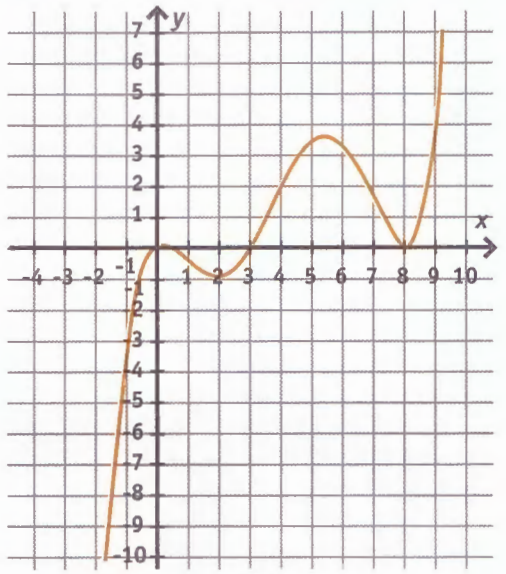
b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$

d) $f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

**78** El gráfico corresponde a una función polinómica de grado mínimo.




Encuentren en cada caso, si es posible, la fórmula factorizada de una función con las mismas características y que cumpla las siguientes condiciones.

a) De grado 13 con todas sus raíces reales.

b) Una función polinómica de grado 5 tal que (1; 49) pertenezca a la misma y con todas sus raíces reales.

c) Una función polinómica de grado 10 con todas sus raíces reales.

d) Una función polinómica de grado mínimo con $(x^2 + 4)$ múltiplo de esta.

**79** Hallen, siempre que sea posible:

a) la expresión factorizada de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales de grado 6 que incluya entre sus raíces $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$.

b) la expresión factorizada de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales de grado 6 tal que $f(-1) = -20$ y que incluya entre sus raíces $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$.

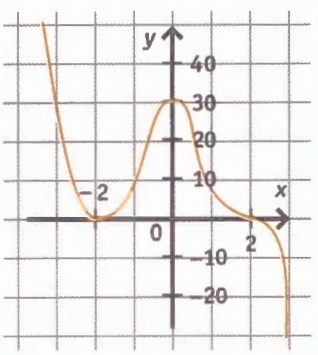
c) la expresión factorizada de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales de grado 5 que incluya entre sus raíces $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$.

d) la expresión factorizada de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales de grado 5 tal que al dividirla por $(x + 1)$ el resto sea 20 y que incluya entre sus raíces $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$.

e) la expresión factorizada de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales de grado 3 que tenga raíces $x_1 = 0$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$.

**80** Consideren el siguiente gráfico.

a) Hallen la fórmula de la función polinómica de grado 3 representada.




b) Hallen la fórmula de una función polinómica de grado 4 representada y expliquen por qué no se ve la gráfica completa.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

**1** Los polinomios $P(x) = x^3 + 8x^2 - x - 8$ y $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ tienen en común:

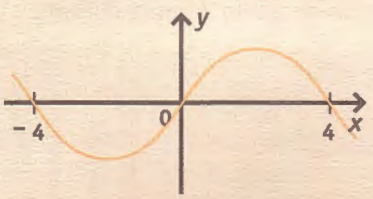
- a) ninguna raíz.
- b) dos raíces.
- c) una raíz.
- d) tres raíces.

**2** La función polinómica $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$ tiene contacto con el eje de las abscisas en:

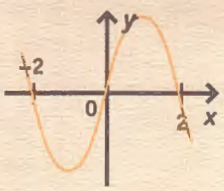
- a) ningún punto.
- b) dos puntos.
- c) un punto.
- d) tres puntos.

**3** La función polinómica $f(x) = x^3 - 4x$ tiene como gráfico.

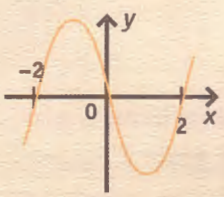
a)



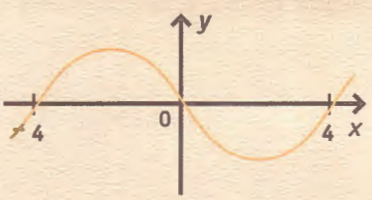

b)




c)




d)



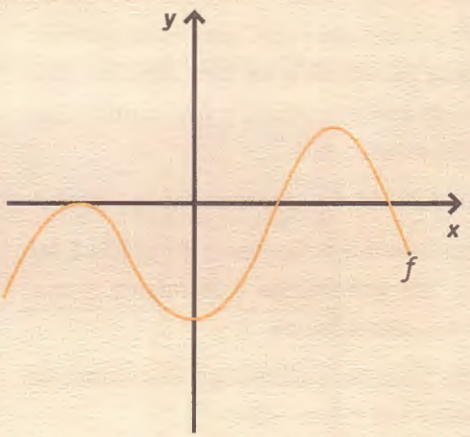

**4** El conjunto de positividad de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es:

- a) $(0; 2)$
- b) $(-\infty; +\infty)$
- c) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$
- d) $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$

**5** Si $f(x) = -nx^3 + 3x^2 + nx$, y sabemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, entonces:

- a) $n = 2$
- b) $n = -1$
- c) $n = 1$
- d) $n = -2$

**6** El grado de la función polinómica $f$ del siguiente gráfico puede ser:




- a) 2
- b) 4
- c) 3
- d) 1

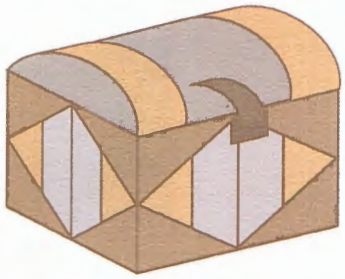
**7** La ecuación $9x^4 + 6x^2 + 1 = 0$

- a) tiene dos soluciones reales distintas.
- b) tiene tres soluciones reales distintas.
- c) tiene cuatro soluciones reales distintas.
- d) no tiene soluciones reales.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# ACTIVIDADES INTEGRADORAS

Se quiere construir un baúl con forma de prisma rectangular y tapa con un contorno parabólico, como se muestra en la figura. Sin la tapa, el baúl tiene igual profundidad que altura, y su largo supera la altura en 50 cm.



**1** Escriban la función polinómica que permite encontrar el volumen del baúl sin la tapa.

.....

.....

**2** Hallen sus dimensiones sabiendo que su volumen es 144 000 $cm^3$.

.....

.....

**3** Averigüen la fórmula del contorno parabólico que permita encastrar perfectamente con la parte de abajo, si la altura máxima del baúl es de 52 cm.

.....

.....

**4** Calculen los centímetros exactos de vivo metálico que se necesita incorporar en los rombos de las caras laterales, si sus vértices están en los puntos medios de las aristas.

.....

.....

**5** Consideren una de las caras cuadradas del baúl.

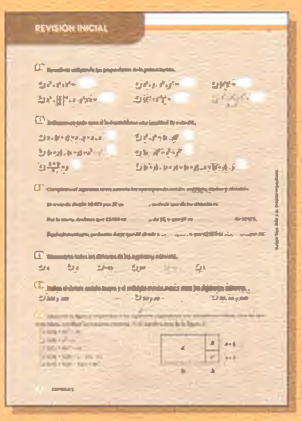
a) Represéntenla en un sistema de ejes cartesianos, haciendo coincidir un vértice con el origen de coordenadas y superponiendo la diagonal sobre el semieje positivo de las abscisas.

b) Escriban la forma binómica y polar de los números complejos que determinan los cuatro vértices.

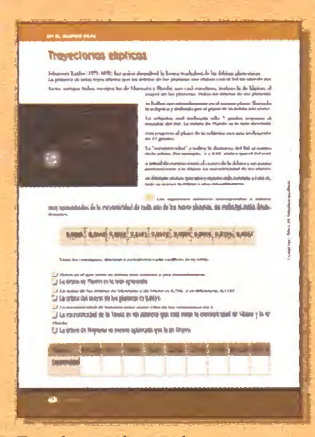
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

# Cómo son estos cuadernillos

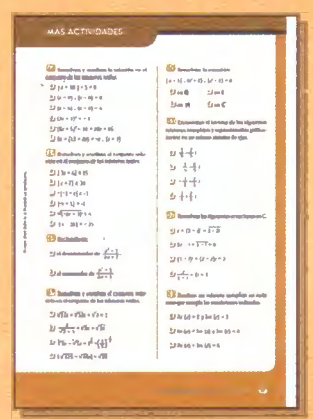
**Apertura**
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



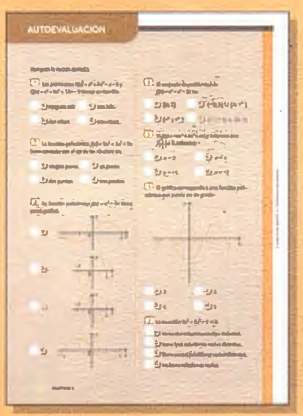

**Revisión inicial**
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



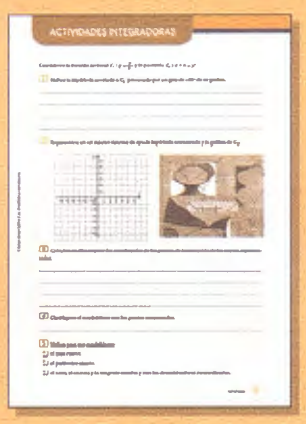

**En el mundo real**
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



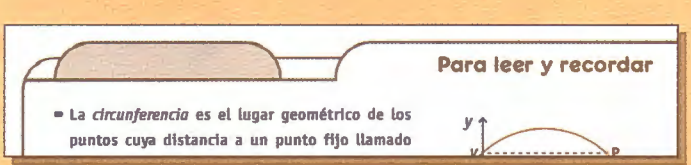

**Más actividades**
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



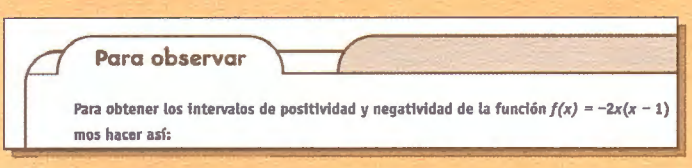

**Autoevaluación**
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.




**Actividades integradoras**
Al final de los cuadernillos 3 y 5, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.




Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).




Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE